Equation de 1877
Baccalauréat ès Sciences

Soit l'équation (E_1): $x^4+4x^3-6x^2-4x+1=0$

On pose $z=x-\frac{1}{x}$

On a alors $z^2=(x-\frac{1}{x})^2 \Rightarrow z^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2$

On vérifie que $x=0$ *n'est pas solution de l'équation :* $(0)^4+4(0)^3-6(0)^2-4(0)+1=1$

$x\neq 0$

$$x^4+4x^3-6x^2-4x+1=0$$

$$x^2*(x^2+4x-6-4*\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})=0 \quad Or\ x\neq 0 \Leftrightarrow x^2\neq 0$$

$$Donc\ x^2+4x-6-4*\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}-2+4*(x-\frac{1}{x})-4=0$$

On obtient finalement une nouvelle équation (E_2): $z^2+4z-4=0$

Equation du second degré très facile à résoudre...

$$\Delta=(4)^2-4(1)(-4)=32$$

$$z'=\frac{(-4-\sqrt{32})}{2}=\frac{(-4-4\sqrt{2})}{2}=\mathbf{-2-2\sqrt{2}}$$

$$z''=\frac{(-4+\sqrt{32})}{2}=\mathbf{-2+2\sqrt{2}}$$

Nous avons donc les deux solutions z' *et* z'' *de l'équation* (E_2). *Il faut désormais trouver les solutions de l'équation* (E_1) *Pour cela c'est très simple :*

$$On\ a : z=x-\frac{1}{x} \Rightarrow z=\frac{(x^2-1)}{x} \Rightarrow -x^2+zx+1=0$$

Nous avons alors une nouvelle équation (E_3) *du second degré, qu'il faut résoudre avec les deux valeurs de z calculées juste avant.*

Une partie de rigolade aux airs de course d'orientation. Attention à ne pas se perdre dans les calculs !

Commençons avec $z=z'=-2-2\sqrt{2}$

(E_3) *devient :* $-x^2-(2+2\sqrt{2})x+1=0$

$$\Delta=[-(2+2\sqrt{2})]^2-4(-1)(1)=16+8\sqrt{2}$$

$$x_1=\frac{(2+2\sqrt{2}-\sqrt{16+8\sqrt{2}})}{-2}=-\frac{(2+2\sqrt{2}-2\sqrt{4+2\sqrt{2}})}{2}=\mathbf{-1-\sqrt{2}+\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$$

$$x_2=\frac{(2+2\sqrt{2}+\sqrt{16+8\sqrt{2}})}{-2}=\mathbf{-1-\sqrt{2}-\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$$

De la même façon, procédons avec $z=z''=-2+2\sqrt{2}$

(E_3) *devient :* $-x^2+(-2+2\sqrt{2})x+1=0$

$$\Delta=(-2+2\sqrt{2})^2-4(-1)(1)=16-8\sqrt{2}$$

$$x_3=\frac{(2-2\sqrt{2}-\sqrt{16-8\sqrt{2}})}{-2}=\mathbf{-1+\sqrt{2}+\sqrt{4-2\sqrt{2}}}$$

$$x_4=\frac{(2-2\sqrt{2}+\sqrt{16-8\sqrt{2}})}{-2}=\mathbf{-1+\sqrt{2}-\sqrt{4-2\sqrt{2}}}$$

Et finalement, l'équation (E_1)*:* $x^4+4x^3-6x^2-4x+1=0$ *admet quatre solutions:*

$$\boldsymbol{x=-1-\sqrt{2}+\sqrt{4+2\sqrt{2}}\ ;\ x=-1-\sqrt{2}-\sqrt{4+2\sqrt{2}}\ ;\ x=-1-\sqrt{2}+\sqrt{4-2\sqrt{2}}\ ;\ x=-1-\sqrt{2}-\sqrt{4-2\sqrt{2}}}$$

Pas si compliqué finalement ce bac !